MODULO 3

TITOLO	EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ALGEBRICHE DI PRIMO GRADO
FINALITA'	Risoluzione delle equazioni e delle disequazioni algebriche di primo grado con una o più incognite e loro applicazioni
PREREQUISITI	• Calcolo letterale: SOMMA, DIFFERENZA, PRODOTTO di polinomi; QUADRATO e CUBO di un binomio; • Insiemi numerici; • Concetto di intervallo; • Uguaglianze e loro proprietà; • Disuguaglianze e loro proprietà; • Concetto di proposizione logica; • Legge di annullamento di un prodotto.
OBIETTIVI	1. Risoluzione delle equazioni di primo grado intere numeriche; 2. Risoluzione di equazioni algebriche di grado superiore riconducibili a quelli di primo grado; 3. Risoluzioni delle disequazioni algebriche di primo grado con una incognita; 4. Risoluzioni di equazioni di primo grado con due o più incognite; 5. Risoluzione di equazioni algebriche a coefficienti letterali; 6. Risoluzione di equazioni algebriche fratte; 7. Applicazioni delle equazioni nella risoluzione di problemi.
Si deve sapere	• Cos'è un'uguaglianza; (A: 20.1) • Le proprietà delle uguaglianze; (A: 20.1.1) • Cos'è un'identità; (A: 20.1) • Cos'è un'equazione; (A: 20.1) • Cos'è una disuguaglianza; (A: 21.1) • Le proprietà delle disuguaglianze; (A: 21.1.1) • Cos'è una disequazione; (A: 21.3) • Cos'è un intervallo; (A: 21.2) • Cosa s'intende per soluzione di un'equazione; • Cosa s'intende per soluzione di una disequazione • Cosa s'intende per grado di un'equazione e di una disequazione algebrica; • Cosa s'intende per equazione DETERMINATA, INDETERMINATA e IMPOSSIBILE; • Cosa s'intende per grado di un sistema di equazioni con due o più incognite.

Si deve saper fare.	• Le operazioni inverse dell'addizione e della moltiplicazione; • Le operazioni con i monomi e i polinomi; • Le operazioni con le frazioni algebriche; • La risoluzione di un'equazione algebrica intera di primo grado ad una incognita; • La risoluzione di una disequazione algebrica intera di primo grado ad una incognita; • La risoluzione di un'equazione algebrica fratta; • La risoluzione di un'equazione algebrica di primo grado a coefficienti letterali; • La risoluzione di semplici disequazioni fratte; • La risoluzione di sistemi lineari; • L'applicazione delle equazioni nella risoluzione di problemi di vario tipo.
Vari tipi di uguaglianze	1) Si considerino le seguenti espressioni: $A = 6 - 2$ e $B = 3 + 1$. Poiché sia la prima espressione sia la seconda rappresentano il numero 4, consegue che esse sono uguali e si scrive: $A = B$. E' lecito scrivere allora: $6 - 2 = 3 + 1$ 2) Siano date le espressioni: $C = 7 - 2$ e $D = 8 - 4$. La prima espressione rappresenta il numero 5 e la seconda il numero 4. Poiché le due espressioni non rappresentano la medesima entità, si dice che esse sono diverse e si scrive: $C \neq D$. Quindi, si ha: $7 - 2 \neq 8 - 4$. 3) Siano date le espressioni letterali: $X(a) = a^2 - 3a$ e $Y(a) = a(a - 3)$ dove la lettera a rappresenta un generico numero reale. I valori numerici rappresentati dalle due espressioni dipendono dai valori che sono attribuiti alla lettera a. Difatti, per $a = 5$, si ha: $X(5) = 5^2 - 3 \cdot 5 = 25 - 15 = 10,\quad Y(5) = 5(5 - 3) = 10.$ Si può scrivere, allora: $X(5) = Y(5)$. Eseguendo la moltiplicazione nella seconda espressione, si ha: $Y(a) = a(a - 3) = a^2 - 3a.$ Come si vede, entrambe le espressioni rappresentano la medesima entità, perciò si può scrivere: $X(a) = Y(a)$, ossia: $a^2 - 3a = a(a - 3). \qquad (1)$ La (1) rappresenta un'uguaglianza sempre vera ossia indipendentemente dai valori numerici che siano attribuiti alla lettera a. Si dice che essa è un'uguaglianza incondizionata, la quale è denominata IDENTITA'. L'espressione scritta prima del segno di uguaglianza rappresenta il PRIMO MEMBRO dell'identità, quella scritta dopo tale segno ne rappresenta il SECONDO MEMBRO. 4) Siano date le espressioni letterali: $P(m) = 2m - 7$ e $Q(m) = m + 4$. Per $m = 4$, si ha: $P(4) = 2 \cdot 4 - 7 = 8 - 7 = 1$, $Q(4) = 4 + 4 = 8$. Si può scrivere: $P(4) \neq Q(4)$. Per $m = 11$, si ha:

	$P(11) = 2 \cdot 11 - 7 = 22 - 7 = 15$, $Q(11) = 11 + 4 = 15$. Si può scrivere: $P(11) = Q(11)$. Come si vedrà prossimamente, le due espressioni date rappresentano un'uguaglianza soltanto per $m = 11$. Si può dire allora che $2m - 7 = m + 4$ è un'uguaglianza condizionata, la quale è denominata EQUAZIONE. Quindi, si può dire: **IDENTITA' è un'uguaglianza incondizionata;** **EQUAZIONE è un'uguaglianza condizionata.** Si può dire pure che: • **Un'<u>identità</u> è una tautologia, ossia una forma proposizionale sempre vera**. (A: 3.1, 3.2, 4.3). • **Un'<u>equazione</u> è una forma proposizionale con qualità VERO soltanto per certi particolari valori da attribuire alle incognite che vi compaiono.**
ESEMPI DI IDENTITA'	1. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; 2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; 3. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; 4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$; 5. $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$; … Le espressioni scritte sono tutte delle tautologie. Ciò vuol dire che esse rappresentano tutte delle forme proposizionali con qualità sempre VERO per qualsiasi valore delle lettere che vi sono presenti. Si dice che le uguaglianze scritte sono incondizionatamente vere.
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO. (A: 20.2, 20.3, 20.4, 21.3)	Risolvere un'equazione significa determinare i valori che devono essere attribuiti alle lettere che vi compaiono, dette incognite, in modo che i due membri siano identici. In altri termini, si tratta di trovare quei particolari numerici o letterali che trasformino l'uguaglianza data in una identità. 1) $3x = 7$. Si tratta di determinare un fattore di una moltiplicazione, essendo noti il prodotto e l'altro fattore. Applicando l'operazione inversa della moltiplicazione, si ha: $x = \frac{7}{3}$ VERIFICA: 1° membro = $3x = 3 \cdot \frac{7}{3} = 7$; 2° membro = 7. Come si vede, i due membri dell'uguaglianza data sono identici per $x = \frac{7}{3}$. Il numero $\frac{7}{3}$ è la soluzione o radice dell'equazione data. Per ogni $x \neq \frac{7}{3}$ l'uguaglianza data non è verificata.

Si dice che la forma proposizionale $3x = 7.$ risulta vera per $x = \frac{7}{3}$, falsa per $x \neq \frac{7}{3}$.

2) $2x > 7.$

Dividendo entrambi i membri per 2, si ha: $x > \frac{7}{2}.$

Qualunque numero maggiore di $\frac{7}{2}$ verifica la disequazione data.

Come si vede, mentre un'equazione di primo grado è verificata da un unico valore numerico, una disequazione, invece, è verificata da tutti i valori numerici di un intervallo.

3) $3x < 5.$

Dividendo entrambi i membri per 3, si ha: $x < \frac{5}{3}.$

4) $-2x > 7.$

Dividendo entrambi i membri per -2, si ha: $x < -\frac{7}{2}.$

5) $3x - 7 = 8.$

Sommando 7 a entrambi i membri dell'equazione, si ha:

$(3x - 7) + 7 = 8 + 7.$

Svolgendo i calcoli, si ha: $3x = 15.$

Dividendo entrambi i membri per 3, si ha:
$x = 5.$ (Radice o soluzione dell'equazione).

VERIFICA: 1° membro = $3x - 7 = 3 \cdot 5 - 7 = 15 - 7 = 8$;
2° membro = 8.

Poiché il numero 5 rende identici i due membri dell'equazione data, si dice che esso ne rappresenta la soluzione.

6) $2x - 5 = 4x + 1.$

Sommando 5 a entrambi i membri, si ha:

$(2x - 5) + 5 = (4x + 1) + 5.$

$2x = 4x + 6.$

Sottraendo $4x$ da entrambi i membri, si ha:

$2x - 4x = (4x + 6) - 4x.$

$-2x = 6.$

Dividendo entrambi per -2, si ha:

$x = -3.$ (radice dell'equazione)

	VERIFICA: 1° membro: $2x - 5 = 2 \cdot (-3) - 5 = -6 - 5 = -11$; 2° membro $= 4x + 1 = 4 \cdot (-3) + 1 = -12 + 1 = -11$. Poiché il valore trovato trasforma l'uguaglianza data in un'identità, si dice che esso è proprio la radice dell'equazione proposta. 7) $12x = 15$. Dividendo entrambi i membri per 3, si ha: $4x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{4}$. 8) $177x = 177$. Dividendo entrambi i membri per 177, si ha: $x = 1$. 9) $-17x = 17$. Dividendo entrambi i membri per -17, si ha: $x = -1$. 10) $-35x = -35$. Dividendo entrambi i membri per -35, si ha: $x = 1$. 11) $11x = -11$. Dividendo entrambi i membri per 11, si ha: $x = -1$ 12) $\frac{2}{3}x = \frac{5}{7}$. Moltiplicando entrambi i membri per 21, minimo comune multiplo dei denominatori, si ha: $21 \cdot \frac{2}{3}x = 21 \cdot \frac{5}{7}$. Eseguendo i calcoli, si ha: $14x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{14}$
Suggerimento utile	• Far risolvere molte di queste semplici equazioni agli alunni, pretendendo che ogni passaggio sia adeguatamente motivato. • Far enunciare ad alta voce tutte le proprietà delle uguaglianze. • La regola pratica di trasporto di un termine da un membro all'altro, mediante cambiando del segno, sia applicata soltanto dopo aver accertato che gli alunni abbiano veramente capito e assimilato le proprietà delle uguaglianze.
ALTRI ESEMPI	Risolvere le equazioni: 1) $2(x - 2) - (5x - 1) + 6 = 3(2 - x) + 7x - 1$. Svolgendo i calcoli, si ha: $2x - 4 - 5x + 1 + 6 = 6 - 3x + 7x - 1$.

Riducendo i termini simili in entrambi i membri, si ha:

$-3x + 3 = 4x + 5.$

Separando i termini incogniti da quelli noti, si ha:

$-3x - 4x = -3 + 5.$

Riducendo i termini simili, si ha:

$-7x = 2.$

Moltiplicando entrambi i membri per -1, si ha:

$7x = -2.$

Da cui: $x = -\frac{2}{7}.$

2) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} > \frac{2}{3}x - 1.$

Moltiplicando entrambi i membri, e quindi tutti i termini, per 12, si ha:

$6x - 9 > 8x - 12.$

Separando i termini incogniti da quelli noti, si ha:

$6x - 8x > 9 - 12 \rightarrow -2x > -3 \rightarrow 2x < 3 \rightarrow x < \frac{3}{2}.$

3) $\frac{2x-3}{5} - \frac{x-1}{2} - 1 = \frac{1-2x}{4} + x.$

Moltiplicando tutti i termini per 20, minimo comune multiplo dei denominatori, si ha:

$4(2x - 3) - 10(x - 1) - 20 = 5(1 - 2x) + 20x.$

Eseguendo i calcoli, si ha:

$8x - 12 - 10x + 10 - 20 = 5 - 10x + 20x.$

Riducendo i termini simili in entrambi i membri, si ha:

$-2x - 22 = 5 + 10x.$

Separando i termini incogniti dai termini noti, si ha:

$-2x - 10x = 22 + 5 \rightarrow -12x = 27 \rightarrow 4x = -9 \rightarrow x = -\frac{9}{4}.$

4) $2(x - 1) - 3 = x - (1 - x) - 4.$

Svolgendo i calcoli, si ha:

$2x - 2 - 3 = x - 1 + x - 4.$

Riducendo i termini simili in entrambi i membri, si ha:

$2x - 5 = 2x - 5.$

Come si vede, i due membri sono identici. Si dice che l'equazione è INDETERMINATA e ciò vuol significare che essa risulta verificata da qualsiasi valore sia attribuito all'incognita x. Si dice pure che l'uguaglianza data è una forma proposizionale sempre vera, indipendentemente dai valori che possano essere attribuiti all'incognita x. Più semplicemente, si può dire che l'uguaglianza data rappresenta una TAUTOLOGIA.

5) $3(x - 1) + 2 = 2x - (5 - x).$

	Svolgendo i calcoli, si ha: $3x - 3 + 2 = 2x - 5 + x.$ Riducendo i termini simili in entrambi i membri, si ha: $3x - 1 = 3x - 5.$ Sottraendo $3x$ da entrambi i membri, si ha: $-1 = -5.$ FALSO Si dice che l'equazione è impossibile e ciò vuol significare che essa non è verificata da nessun valore che sia attribuito all'incognita. Si dice che l'uguaglianza data rappresenta una forma proposizionale sempre falsa, a prescindere dai valori che possano essere attribuiti all'incognita x. Più semplicemente, si dice che l'uguaglianza data è una CONTRADDIZIONE. 6) $(x-1)^2 - 3x < x(x+2) + x - 5.$ Svolgendo i calcoli, si ha: $x^2 - 2x + 1 - 3x < x^2 + 2x + x - 5.$ Riducendo i termini simili in entrambi i membri, si ha: $x^2 - 5x + 1 < x^2 + 3x - 5.$ Separando i termini incogniti da quelli noti, si ha: $x^2 - 5x - x^2 - 3x < -1 - 5.$ Riducendo i termini simili in entrambi i membri, si ha: $-8x < -6.$ Dividendo entrambi i membri per -2, si ha: $4x > 3.$ Dividendo entrambi i membri per 4, si ha: $x > \frac{3}{4}.$
GENERALITA' SULLE EQUAZIONI ALGEBRICHE CON UNA INCOGNITA. (A: 20.2, 20.3, 20.4, 20.6, 20.7)	• **Un'equazione si dice ALGEBRICA se in essa compaiono soltanto operazioni di tipo algebrico: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, potenza, estrazione di radice.** • **Un'equazione algebrica si dice RAZIONALE se in essa non compaiono operazioni di estrazione di radice.** • **Un'equazione razionale si dice INTERA se l'incognita non compare al denominatore di qualche frazione.** • **Un'equazione razionale si dice FRATTA se l'incognita è presente nel denominatore di qualche frazione.** • **Un'equazione algebrica intera si dice ridotta in forma normale se è del tipo $A = 0$, dove il primo membro è rappresentato da un polinomio in cui è stata fatta la riduzione dei termini simili.**
ESEMPI DI EQUAZIONI ALGEBRICHE	1. $3x - 7 = 0;$ 2. $4x^2 - 8x + 1 = 0;$ 3. $x^3 - 7x^2 + 4x + 3 = 0;$

INTERE A UNA INCOGNITA RIDOTTE IN FORMA NORMALE	4. $x^6 - x^2 + 5x - 1 = 0$ …
GRADO DI UNA EQUAZIONE ALGEBRICA INTERA CON UNA INCOGNITA	• **Si dice GRADO di un'equazione algebrica con una incognita ridotta a forma normale il massimo esponente che l'incognita presenta nell'equazione.** Negli esempi precedenti, le equazioni sono rispettivamente di primo, secondo, terzo e sesto grado.
SOLUZIONI (o radici) DI UNA EQUAZIONE ALGEBRICA	• **I valori che verificano un'equazione si dicono SOLUZIONI o RADICI dell'equazione.** • **Il numero delle radici di un'equazione algebrica è espresso dal grado dell'equazione.** Ad esempio: • Un'equazione di <u>primo grado</u> ammette al massimo una radice. • Un'equazione di <u>secondo grado</u> ammette al massimo due radici. • Un'equazione di <u>terzo grado</u> ammette al massimo tre radici. • E così via. La più generale equazione algebrica intera è rappresentata dall'espressione: $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$ dove $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sono numeri reali e n è un numero naturale. Un'equazione algebrica di grado n ammette n radici, distinte o coincidenti, le quali possono tutte reali, tutte complesse, alcune reali e altre complesse
EQUAZIONI EQUIVALENTI	**Due equazioni algebriche si dicono EQIVALENTI se sono dello stesso grado e ammettono le stesse radici.** **Data un'equazione, applicando le proprietà delle uguaglianze si ottengono equazioni equivalenti alla data.** ESEMPIO Risolvere l'equazione: $(3x - 1)^2 - 2(5x - 2) = 7 + 9(x^2 + 3x + 1) - x.$ (1) Svolgendo i calcoli, si ha: $9x^2 - 6x + 1 - 10x + 4 = 7 + 9x^2 + 27x + 9 - x.$ (2) Riducendo i termini simili in entrambi i membri, si ha: $9x^2 - 16x + 5 = 9x^2 + 26x + 16.$ (3) Sottraendo $9x^2$ da entrambi i membri, si ha: (Proprietà I) $- 16x + 5 = 26x + 16.$ (4) Separando i termini incogniti da quelli noti, si ha: (Proprietà I) $-16x - 26x = - 5 + 16.$ (5)

	Riducendo i termini simili in entrambi i membri, si ha: $-42x = 11.$ (6) Moltiplicando entrambi i membri per -1, si ha: (Proprietà IV) $42x = -11.$ (7) Eseguendo l'operazione inversa della moltiplicazione, si determina il fattore incognito x. Si ha, cioè: $x = -\frac{11}{42}$ (8) Come si vede, applicando le regole del calcolo letterale e tenendo conto delle proprietà delle uguaglianze, dall'equazione (1), si passa successivamente alle equazioni (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), le quali sono tutte equivalenti fra loro. Pertanto, il risultato ottenuto è radice (o soluzione) di tutte le suddette equazioni. Attraverso l'applicazione delle proprietà delle uguaglianze, un'equazione algebrica di primo grado con una incognita si può sempre ricondurre alla seguente forma generale: $ax = b.$ I simboli a e b sono denominati rispettivamente <u>coefficiente dell'incognita</u> e <u>termine noto</u> e sono dei numeri se l'equazione è numerica. Il simbolo x si chiama incognita dell'equazione. A seconda dei valori che sono attribuiti alle lettere a e b, l'equazione può essere **determinata, indeterminata o impossibile.** Tenuto conto che la divisione di un numero per zero non ha significato, si può dire: • Se $a \neq 0$, risulta: $x = \frac{b}{a}$, l'equazione è DETERMINATA. • Se $a = 0$ e $b \neq 0$, l'equazione è IMPOSSIBILE. • Se $a = 0$ e $b = 0$ l'equazione è INDETERMINATA. Nel primo caso l'equazione è verificata da un unico valore (equazione determinata), nel secondo da nessuno (equazione impossibile) e nel terzo da qualsiasi valore (equazione indeterminata).
EQUAZIONI ALGEBRICHE DI GRADO SUPERIORE AL PRIMO	Risolvere le seguenti equazioni: 1) $(x-2)(x-7)(x-10) = 0$ Si tratta di un'equazione di terzo grado, la quale, per la legge di annullamento di un prodotto (20.5), si può scindere in tre equazioni di primo grado. Si ha: $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2;$ $x - 7 = 0 \rightarrow x = 7;$ $x - 10 = 0 \rightarrow x = 10.$ Le radici dell'equazione data sono: $x_1 = 2$, $x_2 = 7$, $x_3 = 10$. 2) $3x^2 - 7x = 0.$ Scomponendo in fattori il polinomio a primo membro, si ha: $x(3x - 7) = 0.$

	Per la legge di annullamento di un prodotto, si ha: $x = 0$ oppure $3x - 7 = 0 \to 3x = 7 \to x = \frac{7}{3}$. Le radici dell'equazione sono: $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{7}{3}$. 3) $9x^2 - 4 = 0$. Scomponendo in fattori, si ha: $(3x + 2)(3x - 2) = 0$. Per la legge di annullamento di un prodotto, si ha: $3x + 2 = 0 \to 3x = -2 \to x = -\frac{2}{3}$. $3x - 2 = 0 \to 3x = 2 \to x = \frac{2}{3}$. Le radici dell'equazione sono: $x_1 = -\frac{2}{3},\ x_2 = \frac{2}{3}$. 4) $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$. Scomponendo in fattori, si ha: 5) $x(x - 2)(x - 4) = 0$. Per la legge di annullamento di un prodotto, si ha: $x = 0$; $x - 2 = 0 \to x = 2$; $x - 4 = 0 \to x = 4$.. Le radici dell'equazione sono: $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$.
EQUAZIONI DI PRIMO GRADO CON PIU' INCOGNITE. (A: 23.1)	1) Risolvere l'equazione: $x + 8 = 14$. Si tratta di UNA equazione di primo grado con UNA incognita la cui risoluzione consiste nel determinare tutti quei valori numerici che sostituiti al termine incognito x trasformino l'uguaglianza data in una identità. Come si sa, la soluzione dell'equazione data è $x = 6$. Si dice che l'equazione data è DETERMINATA. Come visto in precedenza UNA equazione con UNA incognita può essere DETERMINATA, INDETERMINATA o IMPOSSIBILE. 2) Risolvere l'equazione $x + y = 7$. Si tratta di UNA equazione di primo grado con DUE incognite la cui soluzione consiste nel determinare tutte le coppie di numeri che sostituiti alle incognite x, y trasformino l'uguaglianza data in una identità. In questo caso esistono infinite coppie di numeri che verificano l'equazione. Alcune di tali coppie sono: $x = 5$ e $y = 2$. Infatti: $5 + 2 = 7 \to 7 = 7$. $x = 4$ e $y = 3$. Infatti: $4 + 3 = 7 \to 7 = 7$. $x = 10$ e $y = -3$. Infatti: $10 - 3 = 7 \to 7 = 7$. $x = \frac{2}{3}$ e $y = \frac{19}{3}$; Infatti: $\frac{2}{3} + \frac{19}{3} = 7 \mapsto \frac{21}{3} = 7 \mapsto 7 = 7$. e così via.

L’equazione data, essendo verificata da infinite coppie di numeri, è INDETERMINATA.
Per determinare una soluzione dell’equazione data, si procede nel modo seguente:

I) Si supponga di conoscere una delle due incognite. Si ponga, ad esempio, $x = 2$.

II) Sostituendo nell’equazione, si ha: $2 + y = 7$.

III) Così facendo, si perviene a UNA equazione con UNA incognita, la cui soluzione è $y = 5$.

IV) Una soluzione dell’equazione data è rappresentata dalla coppia $x = 2$ e $y = 5$.

Generalmente, la soluzione di una equazione con due incognite è espressa nel modo seguente: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$.

3) Risolvere l’equazione: $x + y + z = 10$.

Si tratta di UNA equazione di primo grado con TRE incognite, la cui soluzione consiste nel determinare tutte le terne di numeri che la verificano. Per determinare una terna di numeri che trasformino l’uguaglianza data in una identità, si fissano a piacere due di essi. Si ponga, ad esempio: $x = 4$ e $z = -1$. Sostituendo nell’equazione data, si perviene alla seguente equazione con una sola incognita:

$$4 + y - 1 = 10 \rightarrow y = 7.$$

Una soluzione dell’equazione data è rappresentata allora dalla terna:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \\ z = -1 \end{cases}.$$

Infatti, si ha: $4 + 7 - 1 = 10 \rightarrow 10 = 10$.

Per determinare un’altra soluzione dell’equazione, si pone, ad esempio:

$y = \frac{1}{2}$ e $z = 0$.

Sostituendo nell’equazione data, si perviene alla seguente equazione con una sola incognita:

$$x + \frac{1}{2} + 0 = 10.$$

Moltiplicando per 2, si ha: $2x + 1 = 20 \rightarrow 2x = 19 \rightarrow x = \frac{19}{2}$.

Si ha, così, un’altra soluzione dell’equazione rappresentata dalla seguente terna di numeri:

$$x = \frac{19}{2},\ y = \frac{1}{2},\ z = 0.$$

Così procedendo, si potranno trovare quante terne si vogliano che verificano l’equazione data.

4) Determinare quali valori delle incognite x ed y verificano simultaneamente le due equazioni: $3x + y = 13$ e $5x - 3y = 17$.

In simboli, si scrive: $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 5x - 3y = 17 \end{cases}$.

Risolvendo la prima equazione rispetto all'incognita y, si ha:

$$y = 13 - 3x. \qquad (1)$$

Sostituendo nella seconda equazione, si perviene alla seguente equazione con una incognita:

$5x - 3(13 - 3x) = 17.$

$5x - 39 + 9x = 17.$

$14x = 56 \rightarrow x = 4.$

Sostituendo nella (1), si trova il valore dell'altra incognita. Si ha, infatti:

$y = 13 - 3 \cdot 4 = 13 - 12 = 1.$

La soluzione richiesta è rappresentata dalla seguente coppia di numeri:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Questa è l'unica coppia di numeri che verificano simultaneamente le due equazioni date.
Come visto negli esempi precedenti, la prima equazione è verificata da infinite coppie di numeri e così pure la seconda. La coppia di numeri trovata è una soluzione comune delle due equazioni date.
Se due o più equazioni sono considerate insieme allo scopo di trovare le soluzioni comuni, si dice che l'insieme di tali equazioni costituisce un SISTEMA DI EQUAZIONI.
Per specificare, ad esempio, che le due equazioni seguenti: $3x + y = 8$ e $4x - 3y = 1$ formino un sistema, si scrive una sotto l'altra e riunite da una parentesi graffa. Il sistema delle due equazioni precedenti è espresso nel modo seguente:

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}.$$

SISTEMI DI EQUAZIONI DI PRIMO GRADO.

(A: 23)

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

1) $\begin{cases} 3x - 2y = 14 \\ x - 7y = -8 \end{cases}$.

Risolvendo la seconda equazione rispetto all'incognita x e sostituendo nell'altra, si perviene ad un'equazione con una incognita. Si può procedere, nel modo seguente:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 14 \\ x - 7y = -8 \rightarrow x = 7y - 8 \end{cases}$$

$3(7y - 8) - 2y = 14; \quad 21y - 24 - 2y = 14; \quad 19y = 38; \quad y = 2.$

$x = 7y - 8 = 7 \cdot 2 - 8 = 14 - 8 = 6$

La soluzione del sistema è rappresentata dalla seguente coppia di numeri:

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}.$$

	2) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ Dividendo entrambi i membri della seconda equazione per 2, il sistema diviene: $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x+y=7 \end{cases}$. Poiché il sistema è formata dalla medesima equazione, le infinite coppie che verificano la prima equazione verificheranno anche la seconda. Si dice che il sistema è INDETERMINATO.
EQUAZIONI FRATTE.	VEDI A: 20.6
EQUAZIONI LETTERALI.	VEDI A: 20.7
APPLICAZIONI DELLE EQUAZIONI NELLA RISOLUZIONE DI PROBLEMI. (A: 24.3)	1) Determinare due numeri sapendo che la loro somma è 80 e che uno è $\frac{3}{5}$ dell'altro. Indicando uno dei due numeri con x, l'altro sarà $\frac{3}{5}x$. Tenendo conto dei dati del problema, si può formare l'equazione: $x+\frac{3}{5}x=80.$ (equazione risolvente il problema) Risolvendo l'equazione si trovano i due numeri richiesti, che sono 30 e 50. 2) Determinare due numeri sapendo che la loro differenza è 5 e che il maggiore di essi supera di 11 i $\frac{3}{5}$ dell'altro. Indicando con x e y tali numeri, si può formare il seguente sistema: $\begin{cases} x-y=5 \\ x=11+\frac{3}{5}y \end{cases}$ Risolvendo il sistema, si trova: $x=20$, $y=15$. Per l'applicazione dell'algebra alla geometria vedere il paragrafo 3 del capitolo 30.
GENERALITA' SULLE DISEQUAZIONI	VEDI A: 21.3
SISTEMI DI DISEQUAZIONI	VEDI A: 21.4
DISEQUAZIONI FRATTE	VEDI A: 21.5
MODULO O VALORE ASSOLUTO	VEDI A: 21.6

DOMANDE

1.	La scrittura $a(a+1) = a^2 + a$ è una identità? Si o NO? Motivare la risposta.
2.	Cos'è una identità?
3.	La scrittura $3x - 2 = 7$ è un'equazione? SI o NO? Motivare la risposta.
4.	Dire qual è la differenza tra equazione e identità
5.	L'equazione $\frac{3}{4}x - 3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x$ è fratta? SI o NO? Motivare la risposta.
6.	Quando un'equazione si dice intera? E quando fratta?
7.	Un'equazione è formata da tre membri. VERO o FALSO?
8.	Un'equazione è formata da due membri separati dal segno $>$. VERO o FALSO?
9.	Da quale segno sono separati i due membri di un'equazione?
10.	Enunciare le proprietà delle uguaglianze.
11.	Un'equazione di primo grado ammette due soluzioni. VERO o FALSO?
12.	Quando un'equazione si dice numerica?
13.	Quando un'equazione si dice fratta?
14.	Quando un'equazione si dice letterale?
15.	Un'equazione letterale è rappresentativa di infinite equazioni numeriche. VERO o FALSO?
16.	Cos'è il grado di un'equazione algebrica?
17.	Un'equazione algebrica di quinto grado ammette cinque soluzioni. VERO o FALSO?
18.	Due equazioni sono equivalenti se sono dello stesso grado e ammettono le stesse radici. VERO o FALSO?
19.	Quali sono i principi di equivalenza delle equazioni?
20.	Quando un'equazione di primo grado con una incognita si dice determinata?
21.	Quando un'equazione di primo grado con una incognita si dice indeterminata?
22.	Quando un'equazione di primo grado con una incognita si dice impossibile?
23.	Un'equazione numerica di primo grado con due incognite ha come soluzioni infinite coppie di numeri. VERO o FALSO?
24.	Un sistema di due equazioni numeriche di primo grado con due incognite può essere determinato, indeterminato o impossibile. VERO o FALSO?
25.	Un sistema di tre equazioni numeriche di primo grado con tre incognite può essere determinato, indeterminato o impossibile. VERO o FALSO?
26.	Un sistema di equazioni è indeterminato se il numero delle incognite supera quello delle equazioni. VERO o FALSO?
27.	Il sistema $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$ è verificato da infinite terne di numeri. VERO o FALSO? Motivare la risposta.
28.	Determinare tre coppie di numeri che verifichino l'equazione: $x - y = 10$.
29.	Determinare tre terne di numeri che verifichino l'equazione: $x - y + 2z = 10$.
30.	Quando due equazioni si dicono equivalenti?

31.	Determinare due terne di numeri che verifichino il sistema: $\begin{cases} x-y+z=6 \\ 2x+y+3z=1 \end{cases}$.
32.	L'equazione letterale $(a-1)x = (a-1)(a-3)$ è impossibile per $a = 3$. VERO o FALSO?
33	L'equazione letterale $(a-1)x = (a-1)(a-3)$ è impossibile per $a = 1$. VERO o FALSO?
34.	L'equazione letterale $(a-1)x = (a-1)(a-3)$ è indeterminata per $a = 3$. VERO o FALSO?
35.	L'equazione letterale $(a-1)x = (a-1)(a-3)$ è indeterminata per $a = 1$. VERO o FALSO?
36.	L'equazione letterale $(a-1)x = (a-1)(a-3)$ è determinata per $a \neq 3$. VERO o FALSO?
37.	L'equazione letterale $(a-1)x = (a-1)(a-3)$ è determinata per $a \neq 1$. VERO o FALSO?
38.	Il numero 4 verifica entrambe le equazioni $x-4=0$ e $x^2-16=0$. Le due equazioni sono equivalenti? SI o NO? Motivare la risposta.
39.	L'equazione $x(x-2) = x^2 - 2x$: *a*) ha due soluzioni; *b*) ha infinite soluzioni; *c*) non ha soluzioni, *d*) ha una soluzione. Qual è la risposta esatta?
40.	L'equazione $x(x-2) = x^2 + 2x$: *a*) ha due soluzioni; *b*) ha infinite soluzioni; *c*) non ha soluzioni, *d*) ha una soluzione. Qual è la risposta esatta?
41.	L'equazione $x(x-2) = 3x^2 - 2x$: *a*) ha due soluzioni; *b*) ha infinite soluzioni; *c*) non ha soluzioni, *d*) ha una soluzione. Qual è la risposta esatta?
42.	L'equazione $x^2 + 4 = 0$ non ha soluzioni nel campo reale. VERO o FALSO?
43.	Il sistema $\begin{cases} 3x-5y=7 \\ 9x-15y=21 \end{cases}$ è indeterminato. VERO o FALSO?
44.	Il sistema $\begin{cases} 3x-5y=7 \\ 9x-15y=20 \end{cases}$ è impossibile. VERO o FALSO?
45.	Determinare k affinché l'equazione $2x - k = 5$ ammetta la soluzione $x = 5$.
46.	Per quale valore di k l'equazione $(k-1)(k-2) = (k-2)(k^2+3)$: *a*) è impossibile ? *b*) è indeterminata? *c*) è determinata?
47.	L'equazione $3x - 2 = 0$ è impossibile nell'insieme dei numeri naturali. VERO o FALSO?
48.	L'equazione $3x - 2 = 0$ è impossibile nell'insieme dei numeri interi relativi. VERO o FALSO?

49.	L’equazione $3x - 2 = 0$ è impossibile nell’insieme dei numeri razionali. VERO o FALSO?
50.	Determinare k affinché l’equazione $(2k - 5)x = k - 1$ sia impossibile.
51.	Determinare k affinché il sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ (k-1)x + 2y = 6 \end{cases}$ *a*) risulti determinato; *b*) risulti indeterminato; *c*) abbia come soluzione $x = 1$, $y = 4$.
52.	Dire cos’è un intervallo.
53.	L’intervallo $3 < x < 7$ è limitato. VERO o FALSO?
54.	L’intervallo $3 < x < 7$ è aperto. VERO o FALSO?
55.	L’intervallo $3 < x < 7$ è chiuso. VERO O FALSO?
56.	La scrittura $x > 5$ rappresenta un intervallo illimitato superiormente. VERO O FALSO?
57.	L’intervallo $x \leq 5$ è illimitato inferiormente e chiuso a destra. VERO O FALSO?
58.	-7 è un numero positivo. VERO O FALSO?
59.	$+6$ è un numero positivo. VERO O FALSO?
60.	La scrittura $-a$ rappresenta sempre un numero negativo. VERO O FALSO?
61.	Per quali valori della lettera a l’espressione $a - 7$ rappresenta un numero negativo?
62.	Un prodotto di due numeri è negativo se tali numeri sono discordi. VERO O FALSO?
63.	Il grado di un sistema di due equazioni con due incognite è uguale al prodotto dei gradi delle singole equazioni. VERO o FALSO?
64.	Il sistema $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 9y = 1 \end{cases}$ è di primo grado. VERO o FALSO. Motivare la risposta.
65.	Il sistema $\begin{cases} 3x^2 - y = 7 \\ x + 9y = 1 \end{cases}$ è di secondo grado. VERO o FALSO. Motivare la risposta.
66.	Il sistema $\begin{cases} 3x - y^3 + x - 7y = 7 \\ x^2 + 9y + 3x - y = 1 \end{cases}$ è di sesto grado. VERO o FALSO. Motivare la risposta.
67.	Il sistema $\begin{cases} 3x^2 - xy^2 + xy - x = 7 \\ x^4 + 9y = 1 \end{cases}$ è di decimo grado. VERO o FALSO. Motivare la risposta.